۱- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۲}$ روی آن نزولی است، کدام است؟

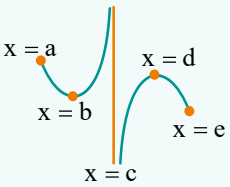
۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲-\sqrt[۳]{۲}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

یکنوایی:

برای تشخیص این که تابع در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است از تابع مشتق می‌گیریم. در هر بازه‌ای که $f'(x)\geq ۰$ باشد، تابع صعودی و در هر بازه‌ای که $f'(x)\leq ۰$ باشد، تابع نزولی است. به شرطی که درون بازه‌ها، مجانب قائم نداشته باشیم.

$[a,b)\rightarrow f'(x)\leq ۰\rightarrow f(x)$ نزولی
$[b,c)\rightarrow f'(x)\geq ۰\rightarrow f(x)$ صعودی
$(c,d]\rightarrow f'(x)\geq ۰\rightarrow f(x)$ صعودی
$[d,e]\rightarrow f'(x)\leq ۰\rightarrow f(x)$ نزولی



از مشتق‌گیری برای تشخیص یکنوایی توابع چندجمله‌ای، گویا، مثلثاتی و ... استفاده می‌کنیم. بهتر است برای تشخیص یکنوایی توابعی مانند براکتی، قدرمطلقی و چندضابطه‌ای، از رسم نمودار کمک بگیریم.

پاسخ تشریحی:

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۳-۲)-۳x^۲(x^۴)}{(x^۳-۲)^۲}=\frac{۴x^۶-۸x^۳-۳x^۶}{(x^۳-۲)^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^۳(x^۳-۸)}{(x^۳-۲)^۲}$$

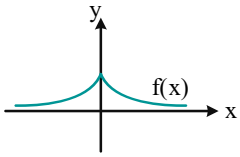
توجه داریم $D_f=\mathbb{R}-\{\sqrt[۳]{۲}\}$ و $x=\sqrt[۳]{۲}$ مجانب قائم است.

x	$-\infty$	۰	$\sqrt[۳]{۲}$	۲	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	صعودی	نزولی	مجانب قائم	نزولی	صعودی

بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ روی آن نزولی است $(۰,\sqrt[۳]{۲})$ می‌باشد که طول آن $\sqrt[۳]{۲}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۲- نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه در مورد وضعیت یکنوایی تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x^۲+۱}$ درست است؟



۱) روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.
۲) روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.
۳) روی $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی و روی $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.
۴) روی $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و روی $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)$ همواره مثبت است و در بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	۰	$-$
$f(x)$	صعودی		نزولی

از تابع $g(x)$ مشتق می‌گیریم تا یکنوایی آن را مشخص کنیم. پس:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x^۲+۱)-۲xf(x)}{(x^۲+۱)^۲}$$

برای تعیین علامت $g(x)$ دو حالت $x>۰$ و $x<۰$ را در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ x\geq ۰\xrightarrow[f'(x)<۰]{f(x)>۰} g'(x)=\frac{\overbrace{f'(x)(x^۲+۱)}^{\text{منفی}}\overbrace{-۲xf(x)}^{\text{منفی}}}{\underbrace{(x^۲+۱)^۲}_{\text{مثبت}}}<۰$$

پس تابع در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

$$۲)\ x \le ۰ \xrightarrow[f'(x)>۰]{f(x)>۰} g'(x) = \frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مثبت}}\overbrace{(x^۲+۱)}^{\text{مثبت}} - ۲x\overbrace{f(x)}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{(x^۲+۱)^۲}_{\text{مثبت}}} > ۰$$

بنابراین تابع در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً صعودی است.

گروه آموزشی ماز

۳- کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا می‌باشد؟

۱) $f(x) = \frac{x}{x^۲-۱}$ ۲) $f(x) = \frac{۱}{x^۳-۱}$ ۳) $f(x) = \frac{x}{x^۲+۱}$ ۴) $f(x) = \frac{x^۳}{x^۲+۱}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

$x = ۱$ مجانب قائم توابع موجود در گزینه‌های ۱ و ۲ می‌باشد. پس این توابع، اکیداً یکنوا نمی‌باشند. نمودار گزینه‌های ۱ و ۲ در اطراف مجانب قائم $(x = ۱)$ به صورت زیر است.

$f(x) = \frac{x}{x^۲-۱}$

$f(x) = \frac{۱}{x^۳-۱}$

پس گزینه‌های ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^۲+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱(x^۲+۱) - ۲x \times x}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

بنابراین تابع موجود در گزینهٔ ۳ اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

$$f(x) = \frac{x^۳}{x^۲+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۳x^۲(x^۲+۱) - ۲x \times x^۳}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{x^۴+۳x^۲}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{x^۲(x^۲+۳)}{(x^۲+۱)^۲}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x) = \frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
		نزولی		صعودی		نزولی	

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x) = \frac{x^۲(x^۲+۳)}{(x^۲+۱)^۲}$		$+$	۰	$+$	
$f(x)$		↗		↗	
		صعودی		صعودی	

بنابراین تابع موجود در گزینهٔ ۴ اکیداً صعودی می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۶x & x \ge ۱ \\ -x^۲ - x & x < ۱ \end{cases}$، چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقاط بحرانی:

نقطهٔ $x = c$ را بحرانی می‌گوییم هرگاه این نقطه عضو دامنهٔ تابع باشد و مشتق تابع در این نقطه یا صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

$c \in D_f \Rightarrow f'(c) = ۰$ یا $f'(c) =$ وجود نداشته باشد

با تعریف فوق، تمام نقاطی که در دامنهٔ تابع هستند و تابع در آن نقاط ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر (نقاط مشتق‌ناپذیر مانند زاویه‌دار، بازگشتی، عطف قائم) باشد، بحرانی هستند. همچنین نقاطی که در آن‌ها، خط مماس، افقی باشد نیز بحرانی هستند . همچنین اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a, b]$ بخواهند نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی $x = a$ و $x = b$ بحرانی هستند.

نکته:

برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع چندضابطه‌ای، نقطهٔ بحرانی تک‌تک ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم. فقط باید نقطهٔ بحرانی در محدودهٔ x قرار داشته باشد. در مرحلهٔ بعد، سراغ نقطهٔ مرزی می‌رویم و پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در آن نقطه بررسی می‌کنیم.
اگر تابع در نقطهٔ مرزی، ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر باشد، آن‌گاه نقطهٔ مرزی نیز بحرانی است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6 & x>1\\ -2x-1 & x<1\end{cases}$$

چون توابع داده شده در هر ضابطه، چندجمله‌ای هستند، پس نقطهٔ مشتق‌ناپذیر ندارند و باید مشتق آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

$3x^2-6=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow$ $x=\sqrt{2}$ در بازهٔ $x>1$ قرار دارد. پس بحرانی است. اما $x=-\sqrt{2}$ بحرانی نمی‌باشد.

$-2x-1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{2}$ در بازهٔ $x<1$ قرار دارد. پس بحرانی است.

تابع $f(x)$ در $x=1$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، پس $x=1$ نیز بحرانی می‌باشد.

بنابراین در کل تابع $f(x)$ سه نقطهٔ بحرانی دارد.

مجموعهٔ نقاط بحرانی $=\left\{-\frac{1}{2},1,\sqrt{2}\right\}$

گروه آموزشی ماز

۵- تابع $f(x)=x+|x|-|x^2+x|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

تمامی عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها را، در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم و تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-x-(x^2+x) & x\le -1\\ x-x+(x^2+x) & -1\le x\le 0\\ x+x-(x^2+x) & x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x^2-x & x\le -1\\ x^2+x & -1\le x\le 0\\ x-x^2 & x\ge 0\end{cases}$$

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم و مشتق تک‌تک ضابطه‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، زیرا توابع موجود در ضابطه‌ها، نقطهٔ مشتق‌ناپذیری ندارند.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x-1 & x<-1 \quad -2x-1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ \times\\ 2x+1 & -1<x<0 \quad 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ \checkmark\\ 1-2x & x>0 \quad 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ \checkmark\end{cases}$$

در بازهٔ $x<-1$ قرار ندارد.

در بازهٔ $-1<x<0$ قرار دارد.

در بازهٔ $x>0$ قرار دارد.

حال به سراغ نقاط مرزی $x=-1$ و $x=0$ می‌رویم. تابع در این دو نقطه پیوسته بوده، پس فقط، مشتق‌پذیری را در این ۲ نقطه بررسی می‌کنیم:

$f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=1\Rightarrow f'(0)=1\Rightarrow$ تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن غیرصفر است، پس $x=0$ نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود.

$f'_-(-1)=-2(-1)-1=1$, $f'_+(-1)=2(-1)+1=-1\Rightarrow$ تابع در $x=-1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد، زیرا مشتق‌های راست و چپ در $x=-1$ برابر نیستند. بنابراین $x=-1$ نقطهٔ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطهٔ بحرانی $\left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۶- تابع $f(x)=۶x^۵+mx^۴+۱۰x^۳$ اکسترمم نسبی ندارد. m چند مقدار صحیح را می‌تواند اختیار کند؟

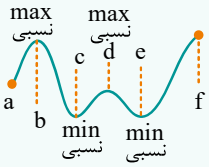
۱) ۳۲ ۲) ۳۱ ۳) ۳۰ ۴) ۲۹

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

اکسترمم نسبی:

تابع $f(x)$ در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$ ، $f(c)\geq f(x)$ باشد. همچنین تابع $f(x)$ در $x=c$ مینیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$ ، $f(c)\leq f(x)$ باشد.

نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.



برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع پیوستهٔ $f(x)$، کافی است از تابع مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر علامت مشتق از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند نقطه max نسبی بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند، نقطه min نسبی می‌باشد. اگر علامت مشتق در یک نقطه تغییر نکند، آن نقطه، اکسترمم نسبی نیست.

پاسخ تشریحی:

زمانی تابع $f(x)$ اکسترمم نسبی ندارد که $f'(x)$ تغییر علامت ندهد.

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$f'(x)=۳۰x^۴+۴mx^۳+۳۰x^۲=۲x^۲(۱۵x^۲+۲mx+۱۵)$$

$x=۰$ ریشه است. علامت $f'(x)$ در $x=۰$ تغییر نمی‌کند. چرا؟

بنابراین عبارت $۱۵x^۲+۲mx+۱۵$ نباید تغییر علامت بدهد، پس یا ریشه ندارد $(\Delta<۰)$ و یا ریشهٔ مضاعف دارد $(\Delta=۰)$. بنابراین:

$$۱۵x^۲+۲mx+۱۵ \Rightarrow \Delta\leq ۰ \Rightarrow (۲m)^۲-۴\times۱۵\times۱۵\leq ۰ \Rightarrow ۴m^۲-۹۰۰\leq ۰ \Rightarrow ۴m^۲\leq ۹۰۰ \xrightarrow{\text{جذر}} |۲m|\leq ۳۰$$

$$\Rightarrow -۳۰\leq ۲m\leq ۳۰ \xrightarrow{\div ۲} -۱۵\leq m\leq ۱۵ \Rightarrow \text{تعداد اعداد صحیح در بازه}=۱۵-(-۱۵)+۱=۳۱$$

گروه آموزشی ماز

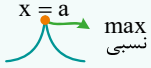
۷- تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$، چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

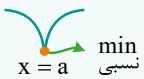
نقاط بازگشتی:

توابع $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$ (m زوج و n فرد) در $x=a$ نقطهٔ بازگشتی دارند که این نقطه می‌تواند max نسبی یا min نسبی باشد.



$f'_+(a)=-\infty$

$f'_-(a)=+\infty$



$f'_+(a)=+\infty$

$f'_-(a)=-\infty$

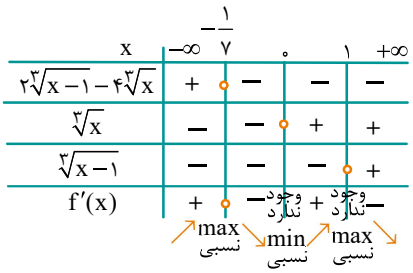
پاسخ تشریحی:

توجه داریم $D_f=\mathbb{R}$. با توجه به درسنامه $x=۰$ و $x=۱$ اکسترمم نسبی هستند. برای پیدا کردن سایر نقاط اکسترمم نسبی، از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}-\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{x-۱}}=\frac{۲\sqrt[۳]{x-۱}-۴\sqrt[۳]{x}}{۳\sqrt[۳]{x}\times\sqrt[۳]{x-۱}} \Rightarrow \begin{cases} ۲\sqrt[۳]{x-۱}-۴\sqrt[۳]{x}=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{x-۱}=۲\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x-۱=۸x \Rightarrow x=-\frac{۱}{۷} \\ \sqrt[۳]{x}=۰ \Rightarrow x=۰ \\ \sqrt[۳]{x-۱}=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi



گروه آموزشی ماز

۸- اگر $A(m,2)$ نقطهٔ max نسبی تابع $f(x)=\begin{cases}x^3-6x^2+n+4 & x\geq 1\\ x^3+3x^2+n-5 & x\leq 1\end{cases}$ باشد، $m+n$ کدام است؟

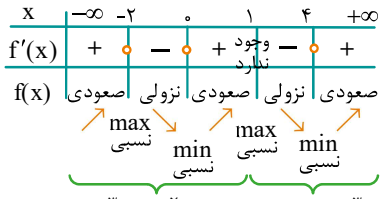
۱) ۱ ۲) ۱ یا ۴ ۳) ۱ یا ۲۵− ۴) ۲− یا ۲۵−

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-12x & x>1\\ 3x^2+6x & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x=0\Rightarrow x=4\\ 3x^2+6x=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=0\end{cases}\end{cases}$$



$f(x)=x^3+3x^2+n-5$ $f(x)=x^3-6x^2+n+4$

توجه داریم که تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر است. نقاط به طول $x=1$ و $x=-2$ طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ هستند. پس m می‌تواند ۱ یا ۲− باشد.

$$f(1)=1-6+n+4=2\Rightarrow n=3\xrightarrow[n=3]{m=1}m+n=4$$

$$f(-2)=-8+12+n-5=2\Rightarrow n=3\xrightarrow[n=3]{m=-2}m+n=1$$

گروه آموزشی ماز

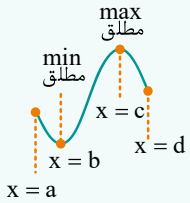
۹- به ازای کدام مقدار m، مجموع کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x)=x^3-3x^2+m$ در بازهٔ $[-1,3]$ برابر ۲ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

نقاط اکسترمم مطلق:

برای به دست آوردن نقاط max و min مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ کافی است نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در این بازه به دست آوریم و عرض نقاط بحرانی که شامل $x=a$ و $x=b$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم. هر کدام بیشتر بود max مطلق و هر کدام کمتر بود min مطلق است.



www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{بحرانی} \\ x=۲ & \text{بحرانی} \end{cases}$$

$$\text{نقاط بحرانی}=\{-۱,۰,۲,۳\}$$

$$f(-۱)=m-۴\Rightarrow \text{مطلق min} \quad f(۰)=m\Rightarrow \text{مطلق max} \quad f(۲)=m-۴\Rightarrow \text{مطلق min} \quad f(۳)=m\Rightarrow \text{مطلق max}$$

بنابراین:

$$\min(f)=m-۴ \text{ و } \max(f)=m\Rightarrow \min(f)+\max(f)=۲\Rightarrow m-۴+m=۲\Rightarrow m=۳$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

باز هم نقاط بحرانی:

معمولاً در تعیین نقاط اکسترمم مطلق یا نقاط بحرانی، بازه می‌دهند. اگر بازه در سوال نداشتیم، دامنهٔ تابع را به عنوان بازه برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق یا نقاط بحرانی در نظر می‌گیریم.

امان از نقاط بحرانی: اگر مشتق تابع، کسری باشد، ریشه‌های صورت و مخرج مشتق، به شرطی که در دامنهٔ تابع باشند، نقطهٔ بحرانی هستند.

پاسخ تشریحی:

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x\geq ۰ \quad (I)$$

$$۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}\geq ۰\Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x}\geq \sqrt{x}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}}۶۴x^۲\geq x^۳\xrightarrow{\text{دو طرف بر } x^۲ \text{ تقسیم } (x>۰)}۶۴\geq x \quad (II)$$

$$D_f=(I)\cap(II)\Rightarrow D_f=[۰,۶۴]$$

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم تا نقاط بحرانی تابع به دست آید.

$$f'(x)=\frac{\frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۲}}-\frac{۳}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}}=\frac{\frac{۴\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}{۲x}}{۲\sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}}=\frac{۴\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}{۴x\sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}}$$

$$۴\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}=۰\Rightarrow ۴\sqrt[۳]{x}=۳\sqrt{x}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}}۴^۶x^۲=۳^۶x^۳\xrightarrow[x\neq ۰]{\text{دو طرف تقسیم بر } x^۲}(\frac{۴}{۳})^۶=x$$

$$۴x\sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ \sqrt{۶\sqrt[۳]{x}-۳\sqrt{x}}=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۶۴ \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین $x=۰$، $x=(\frac{۴}{۳})^۶$ و $x=۶۴$ نقاط بحرانی هستند.

$$f(۰)=۰$$

$$f((\frac{۴}{۳})^۶)=\sqrt{۶\times\sqrt[۳]{(\frac{۴}{۳})^۶}-۳\times\sqrt{(\frac{۴}{۳})^۶}}=\sqrt{۶\times\frac{۱۶}{۹}-۳\times\frac{۶۴}{۲۷}}=\sqrt{\frac{۳۲}{۳}-\frac{۶۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۳۲}{۹}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

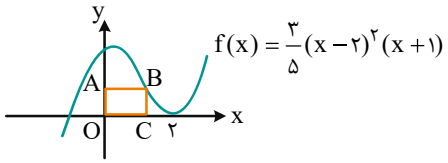
$$f(۶۴)=\sqrt{۶\times\sqrt[۳]{۶۴}-۳\times\sqrt{۶۴}}=\sqrt{۶\times۴-۳\times۸}=۰$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۱- مستطیلی مطابق شکل زیر، طوری قرار گرفته است که یک رأس آن روی نمودار تابع $f(x)$ و دو ضلع آن، روی محورهای مختصات قرار دارد. کدام گزینه در مورد محیط مستطیل درست است؟



۱) کمترین مقدار آن $\frac{۱۶۶}{۴۵}$ است.

۲) بیشترین مقدار آن $\frac{۱۶۶}{۴۵}$ است.

۳) کمترین مقدار آن $\frac{۴۷}{۹}$ است.

۴) بیشترین مقدار آن $\frac{۴۷}{۹}$ است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

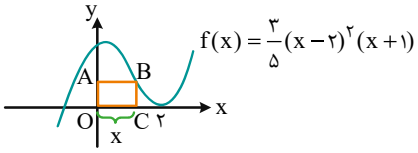
اگر طول نقطهٔ B را x بنامیم، عرض آن $\frac{۳}{۵}(x-۲)^۲(x+۱)$ می‌شود. پس محیط مستطیل برابر است با:

$$P=۲(x+\frac{۳}{۵}(x-۲)^۲(x+۱))\quad ۰\le x\le ۲$$

بنابراین محیط مستطیل به صورت $P(x)=۲x+\frac{۶}{۵}(x-۲)^۲(x+۱)$ است. برای محاسبهٔ بیشترین یا کمترین مقدار محیط، از $P(x)$ مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$P(x)=۲x+\frac{۶}{۵}(x^۳-۳x^۲+۴)\Rightarrow P'(x)=\frac{۱۸}{۵}x^۲-\frac{۳۶}{۵}x+۲\Rightarrow P'(x)=۰\Rightarrow \frac{۱۸}{۵}x^۲-\frac{۳۶}{۵}x+۲=۰\xrightarrow{\times ۵}$$

$$۱۸x^۲-۳۶x+۱۰=۰\xrightarrow{\div ۲}۹x^۲-۱۸x+۵=۰\Rightarrow (۳x-۱)(۳x-۵)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۱}{۳}\\ x=\frac{۵}{۳}\end{cases}$$



$$P(\frac{۱}{۳})=\frac{۲}{۳}+\frac{۶}{۵}(\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۳}+۴)=\frac{۴۶}{۹}\qquad P(\frac{۵}{۳})=\frac{۱۰}{۳}+\frac{۶}{۵}(\frac{۱۲۵}{۲۷}-\frac{۲۵}{۳}+۴)=\frac{۱۶۶}{۴۵}$$

گروه آموزشی ماز

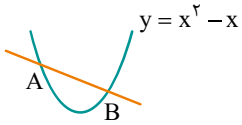
۱۲- خط $y=mx+\frac{۱}{۴}$ نمودار تابع $f(x)=x^۲-x$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. به ازای کدام مقدار m، طول پاره‌خط AB کمترین مقدار ممکن می‌شود؟

۱) ۱ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا معادلهٔ تلاقی خط و منحنی را می‌نویسیم:

$$x^۲-x=mx+\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^۲-(m+۱)x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow \Delta=(m+۱)^۲+۱$$

اختلاف ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$|x_A-x_B|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow |x_A-x_B|=\frac{\sqrt{(m+۱)^۲+۱}}{۱}\Rightarrow |x_A-x_B|=\sqrt{(m+۱)^۲+۱}$$

حال اختلاف عرض دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$|y_A-y_B|=\left|mx_A+\frac{۱}{۴}-(mx_B+\frac{۱}{۴})\right|\Rightarrow |y_A-y_B|=|m||x_A-x_B|\Rightarrow |y_A-y_B|=|m|\sqrt{(m+۱)^۲+۱}$$

اکنون فاصلهٔ ۲ نقطهٔ A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$d=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(m^۲+۲m+۲)+m^۲(m^۲+۲m+۲)}=\sqrt{(m^۲+۲m+۲)(m^۲+۱)}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

زمانی d کمترین مقدار می‌شود که عبارت زیر رادیکال min شود، عبارت زیر رادیکال را k می‌نامیم. ببینید:

$$k=(m^۲+۲m+۲)(m^۲+۱)\Rightarrow k'=(۲m+۲)(m^۲+۱)+۲m(m^۲+۲m+۲)\Rightarrow k'=۴m^۳+۶m^۲+۶m+۲$$

$$k'=۰\xrightarrow{\div ۲}۲m^۳+۳m^۲+۳m+۱=۰\Rightarrow (۲m+۱)\underbrace{(m^۲+m+۱)}_{\Delta<۰}=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین به ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ طول پاره‌خط d کمترین مقدار ممکن می‌شود.

گروه آموزشی ماز

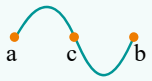
۱۳- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}(۳۵-x^۳)$ در بازهٔ (a,b) به سمت بالاست. بیشترین مقدار ممکن برای $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

تقعر تابع:

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت برای تعیین وضعیت تقعر تابع در این فاصله، مشتق دوم را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا باشد، $f''(x)>۰$ و در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به پایین باشد، $f''(x)<۰$ است.



تقعر تابع در بازهٔ $(a,c)\Rightarrow f''(x)<۰$ رو به پایین است.

تقعر تابع در بازهٔ $(c,b)\Rightarrow f''(x)>۰$ رو به بالا است.

پاسخ تشریحی:

مشتق دوم تابع $f(x)$ را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۳}}(۳۵-x^۳)=۳۵x^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۱۰}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳۵}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}-\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۷}{۳}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۷۰}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}-\frac{۷۰}{۹}x^{\frac{۴}{۳}}$$

$$f''(x)=-\frac{۷۰}{۹}(x^{-\frac{۵}{۳}}+x^{\frac{۴}{۳}})=-\frac{۷۰}{۹}(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۵}}+\sqrt[۳]{x^۴})=-\frac{۷۰}{۹}(\frac{۱+x^۳}{\sqrt[۳]{x^۵}})$$

x	$-\infty$	-۱	۰	$+\infty$
$۱+x^۳$	$-$	۰	$+$	$+$
$\sqrt[۳]{x^۵}$	$-$	$-$	۰	$+$
$f''(x)=-\frac{۷۰}{۹}(\frac{۱+x^۳}{\sqrt[۳]{x^۵}})$	$-$	موجود ۰	نیست $+$	$-$
وضعیت تقعر تابع $f(x)$	∩	∪	∩	

بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تقعر تابع $f(x)$ رو به بالاست، بازهٔ $(-۱,۰)$ می‌باشد که طول آن $۰-(-۱)=۱$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع $f(x)=\cos^۲x+۲\cos x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقطهٔ عطف:

نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲) در این نقطه بتوان خط مماس بر تابع رسم کرد. (خط مماس از تابع می‌گذرد.)

۳) جهت تقعر در این نقطه عوض شود.

عطف است.

عطف نیست. زیرا نمی‌توان در این نقطه یک خط بر منحنی مماس رسم کرد.

عطف نیست. زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.

عطف نیست. زیرا تقعر تابع در این نقطه عوض نشده است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

انواع نقطهٔ عطف:

مشتق دوم در نقطهٔ عطف یا صفر است و یا وجود ندارد. برای به دست آوردن نقطهٔ عطف، مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم. اگر علامت مشتق دوم در نقطه‌ای عوض شود، آن نقطه عطف است در صورتی که شرایط نقطهٔ عطف در آن نقطه رعایت شود.

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=\cos^2 x+2\cos x \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-2\cos x\sin x}_{\sin 2x}-2\sin x \Rightarrow f'(x)=-\sin 2x-2\sin x$$

$$f''(x)=-2\cos 2x-2\cos x \Rightarrow f''(x)=-2(\cos 2x+\cos x)=0 \Rightarrow \underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x-1}+\cos x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\\ \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

برای تعیین علامت $f''(x)$ از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

در نقاط به طول $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ جهت تقعر تابع عوض می‌شود و تابع در این نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر است و شرایط رسم خط مماس بر تابع در این نقاط وجود دارد، پس تابع دو نقطهٔ عطف دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۵- به ازای کدام مقدار m، تابع $f(x)=\frac{x-|x|+m}{|x|+1}$ نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

روش اول:

تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{m}{x+1} & x\geq 0\\ \frac{2x+m}{-x+1} & x\leq 0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{-m}{(x+1)^2} & x>0\\ \frac{2+m}{(-x+1)^2} & x<0\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\frac{2m}{(x+1)^3} & x>0\\ \frac{2(2+m)}{(-x+1)^3} & x<0\end{cases}$$

تنها نقطه‌ای که $f''(x)$ می‌تواند در آن تغییر علامت بدهد، فقط $x=0$ است. بنابراین چون در $f''(x)$ مخرج کسرها مثبت است، پس باید صورت کسرها مختلف‌العلامت باشند. پس:

$$2\times(2+m)\times 2m<0 \Rightarrow -2<m<0$$

از طرف دیگر، باید بتوانیم در $x=0$ خط مماس رسم کنیم، یعنی تابع باید در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:

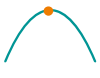
$$\begin{matrix}f'_-(0)=2+m\\ f'_+(0)=-m\end{matrix} \Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0) \Rightarrow 2+m=-m \Rightarrow m=-1$$

روش دوم:

با توجه به تابع دوضابطه‌ای $f(x)$، در می‌یابیم که هر دو ضابطه، تابع هموگرافیک را نشان می‌دهند و تابع هموگرافیک، نقطهٔ عطف ندارد، پس فقط، نقطهٔ مرزی $x=0$ می‌تواند عطف باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۶- نمودار تابع $f(x)=x^8-3x^4-4x$ در همسایگی نقطهٔ $x=-1$ به کدام گزینه شبیه است؟

۱) ۲)  ۳) ۴)

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

تحلیل نقطه‌ای در نمودار:

اگر بخواهیم وضعیت نمودار تابع را در نقطه‌ای مانند $x = a$ بررسی کنیم باید $f'(a)$ و $f''(a)$ را محاسبه کنیم تا شکل تقریبی نمودار در $x = a$ مشخص شود.

پاسخ تشریحی:

$$f'(x) = 8x^7 - 12x^3 - 4 \Rightarrow f'(-1) = -8 + 12 - 4 = 0$$

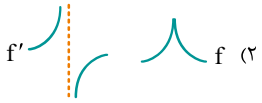
$$f''(x) = 56x^6 - 36x^2 \Rightarrow f''(-1) = 56 - 36 = 20$$

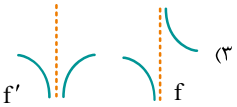
پس شیب خط مماس بر نمودار در $x = -1$ برابر صفر است و تقعر نمودار در $x = -1$ رو به بالا می‌باشد. بنابراین نمودار تابع در این نقطه به صورت می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۷- در کدام مورد، نمودار f و f' در همسایگی نقطه‌ای مانند $x = a$ درست رسم نشده است؟

۱)

۲) 

۳) 

۴)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم تعبیر هندسی مشتق همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. در هر گزینه می‌توان شیب خط مماس بر f را با نمودار f' مطابقت داد اما در گزینه ۴ شیب خطوط مماس بر نمودار f با نمودار f' تطابق ندارد. در شاخه سمت چپ نمودار f، نمودار تابع صعودی اکید بوده و چون تعقر نمودار رو به پایین است شیب خطوط مماس رفته رفته کم می‌شود ولی علامت مثبت دارد ( ) در صورتی که در همسایگی چپ این نقطه در نمودار f'، به $-\infty$ میل می‌کند و با نمودار f تطابق ندارد. پس می‌توان گفت گزینه ۴ پاسخ تست می‌باشد. (به طریق مشابه می‌توان شیب نمودار f را با نمودار f' در سایر گزینه‌ها تطابق داد.)

گروه آموزشی ماز

۱۸- نقطهٔ برخورد مجانب‌های تابع هموگرافیک $f(x) = ax + b + \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$ روی نیمساز ربع اول و سوم مختصات است. مقدار $f(0)$ کدام است؟

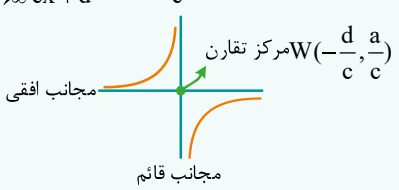
۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

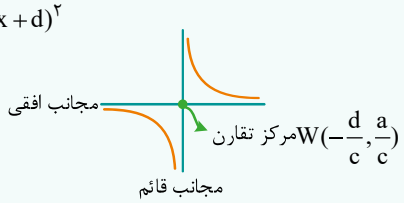
پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

تابع هموگرافیک

تابع $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ و $c \neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم. برای رسم نمودار تابع، مجانب‌های افقی و قائم را به دست می‌آوریم و با مشتق‌گیری، وضعیت یکنوایی تابع را مشخص می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر از نقاط کمکی نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow \begin{cases} cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c} & \text{مجانب قائم} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} \\ y = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y = \frac{a}{c} & \text{مجانب افقی} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \end{cases}$$





www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

ابتدا تابع را مرتب می‌کنیم. ببینید:

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x-1)+2x^2+3}{x-1}=\frac{ax^2-ax+bx-b+2x^2+3}{x-1}\Rightarrow f(x)=\frac{(a+2)x^2+(b-a)x+3-b}{x-1}$$

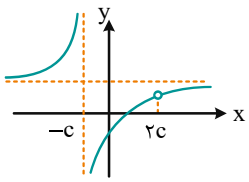
چون تابع هموگرافیک است، پس ضریب x^2 در صورت باید صفر شود. بنابراین: $a+2=0\Rightarrow a=-2$

مجانب قائم تابع خط $x=1$ است و مجانب افقی خط $y=b-a$ یعنی $y=b+2$ است. محل برخورد مجانب‌ها $W(1,b+2)$ است که چون روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، پس: $b+2=1\Rightarrow b=-1$

$$f(x)=\frac{x+4}{x-1}\Rightarrow f(0)=-4$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2-7x+b}{x^2-ax-2}$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع $g(x)=xf(x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)$ در $x=2c$ و $x=-c$ تعریف نمی‌شود.($x=-c$ مجانب قائم است) بنابراین مخرج $f(x)$ به صورت $(x+c)(x-2c)$ است. بنابراین:

$$x^2-ax-2=x^2-cx-2c^2\Rightarrow\begin{cases}-2c^2=-2\Rightarrow c=1\\-a=-c\Rightarrow a=1\end{cases}$$

با توجه به نمودار $c=-1$ نمی‌تواند باشد.

تابع $f(x)$ در $x=2c$ تعریف نمی‌شود اما حد دارد، پس $x=2c$ علاوه بر آن که ریشهٔ مخرج $f(x)$ است، ریشهٔ صورت نیز می‌باشد. پس:

$$\xrightarrow[\text{صورت کسر را هم صفر می‌کند}]{x=2c=2}3\times2^2-7\times2+b=0\Rightarrow12-14+b=0\Rightarrow b=2$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+2}{x^2-x-2}=\frac{(3x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}\Rightarrow f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

ضابطهٔ تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x)=xf(x)\Rightarrow g(x)=\frac{3x^2-x}{x+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{(6x-1)(x+1)-1(3x^2-x)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{6x^2+6x-x-1-3x^2+x}{(x+1)^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{3x^2+6x-1}{(x+1)^2}\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow3x^2+6x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد، پس $g'(x)$ در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع $g(x)$ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- معادلهٔ $x^3-3x|x|=m$ سه جواب حقیقی و متمایز دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-1\le m\le1$
۲) $0\le m\le2$
۳) $-4<m<4$
۴) $-3\le m\le3$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

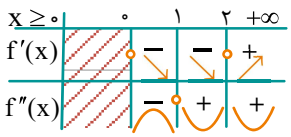
$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge0\\x^3+3x^2 & x\le0\end{cases}$$

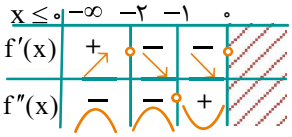
www.biomaze.ir

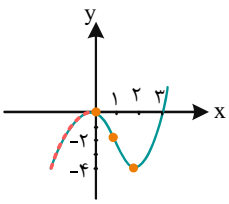
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

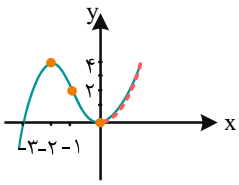
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & x\geq 0\\ 3x^2+6x & x\leq 0\end{cases}\xrightarrow[x=-2,x=0]{x=2}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>0\\ 6x+6 & x<0\end{cases}\xrightarrow{x=-1}$$

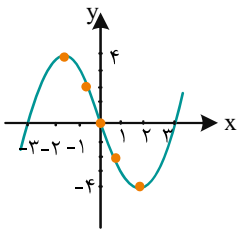
نمودار هر کدام از ۲ ضابطه را رسم می‌کنیم و بعد نمودار $f(x)$ را می‌کشیم:











بنابراین نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

خط $y=m$ با شرط $-۴<m<۴$ در ۳ نقطه نمودار تابع $f(x)$ را قطع می‌کند و در نتیجه معادلهٔ $x^3-3x|x|=m$ سه جواب متمایز دارد.

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۲۱ چه تعداد از عبارت‌های زیر، درست است؟ $(e=1/6\times10^{-19}C)$

الف: نوترون بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است.

ب: در هستهٔ ^{103}Rh، اگر عدد نوترونی برابر ۵۸ باشد، بار الکتریکی خالص هسته، $14/8\times10^{-18}C$ است.

ج: ویژگی‌های هستهٔ یک اتم را، فقط تعداد پروتون‌های هسته تعیین می‌کند.

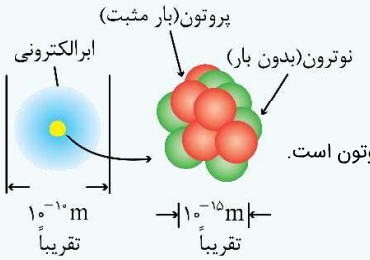
د: ایزوتوپ $^{47}_{22}X$ را با روش شیمیایی، می‌توان از ایزوتوپ $^{49}_{22}X$ جدا کرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۶)

ساختار هسته

با ساختار هسته در درس شیمی آشنا شدین، ما اینجا بیشتر از جنبهٔ درس فیزیک بررسیش می‌کنیم ولی خب اگر شیمیتون خوب باشه، حسابی بهتون کمک می‌کنه. یادتان هست که گفتیم در فیزیک هسته‌ای با ساختار، برهم‌کنش‌ها و واپاشی هسته‌های اتمی سروکار داریم. با توجه به شکل زیر، اتم از دو قسمت هسته و ابر الکترونی تشکیل شده است که هستهٔ اتم در مرکز آن واقع شده است. ابعاد اتم تقریباً از مرتبهٔ $10^{-10}m$ ابعاد هستهٔ اتم تقریباً از مرتبهٔ $10^{-15}m$ است. پس شعاع هستهٔ اتم، تقریباً $\frac{1}{100000}$ شعاع اتم است.



با دقت در شکل مقابل می‌توان فهمید که حجم کل هسته بسیار کوچک‌تر از حجم کل اتم است.

نوکلئون: هستهٔ اتم از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است که به طور کلی نوکلئون نامیده می‌شوند.

نوترون که توسط جیمز چادویک، فیزیک‌دان انگلیسی کشف شد، بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است.

جرم اتم‌ها و همچنین اجزای تشکیل‌دهندهٔ اتم را، افزون بر یکای کیلوگرم با یکای جرم اتمی نیز بیان می‌کنند.

یکای جرم اتمی را با u یا amu نشان می‌دهند که برابر با $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن ۱۲ است.

برخی از ویژگی‌های فیزیکی ذرات تشکیل‌دهندهٔ اتم:

ذره	بار الکتریکی (C)	جرم	
		کیلوگرم (kg)	یکای جرم اتمی (u)
الکترون	$-1/6\times10^{-19}$	$9/109389\times10^{-31}$	$5/4858\times10^{-4}$
پروتون	$+1/6\times10^{-19}$	$1/672622\times10^{-27}$	۱/۰۰۷۲۷۶
نوترون	۰	$1/674929\times10^{-27}$	۱/۰۰۸۶۶۴

اندکی اختلاف

$$1amu = 1/66\times10^{-27}kg$$

تعداد پروتون‌های هسته را عدد اتمی (Z) می‌نامند و در عنصرهای مختلف متفاوت است. در یک اتم خنثی، تعداد پروتون‌های هسته با تعداد الکترون‌های دور هسته برابر است. تعداد نوترون‌های هسته، عدد نوترونی (N) نامیده می‌شود. همچنین مجموع تعداد کل پروتون‌ها و نوترون‌ها را عدد جرمی (A) می‌نامند.

$$\underbrace{A}_{\text{تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها (عدد جرمی)}} = \underbrace{Z}_{\text{تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی)}} + \underbrace{N}_{\text{تعداد نوترون‌ها (عدد نوترونی)}}$$

برای یک عنصر با نماد شیمیایی X، نماد هسته به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$^{\text{عدد جرمی}\rightarrow A}_{\text{عدد اتمی}\rightarrow Z}X^{\leftarrow\text{نماد عنصر}}_{\leftarrow\text{عدد نوترونی}N}$$

ایزوتوپ‌ها:

ویژگی‌های هسته را تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن (عدد جرمی (A)) تعیین می‌کند. خواص شیمیایی هر اتم را تعداد پروتون‌های هسته (عدد اتمی Z) تعیین می‌کند. به همین سبب هسته‌هایی که تعداد پروتون مساوی ولی تعداد نوترون متفاوت دارند خواص شیمیایی یکسانی دارند، در نتیجه این هسته‌ها در جدول تناوبی عناصر هم‌مکان هستند و بنابراین ایزوتوپ (هم‌مکان) نامیده می‌شوند. به طور مثال، کربن به دو صورت پایدار و با درصدهای فراوانی بسیار متفاوتی در طبیعت یافت می‌شود که یکی از ۶ پروتون و ۶ نوترون $(^{12}_{6}C)$، و دیگری از آن‌ها از ۶ پروتون و ۷ نوترون $(^{13}_{6}C)$ تشکیل شده است. این دو هسته، ایزوتوپ‌های کربن هستند. جرم‌های اتمی درج‌شده در جدول تناوبی عناصر، میانگین جرم‌های اتمی ایزوتوپ‌های مختلف هر عنصر است که با توجه به درصد فراوانی آن‌ها حساب شده‌اند. بجز هیدروژن، ایزوتوپ‌های مختلف یک هسته را با نام همان هسته مشخص می‌کنند. حواستان باشد که ایزوتوپ‌ها با روش‌های شیمیایی قابل جداسازی نیستند.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

ایزوتوپ‌های مختلف چند عنصر و درصد فراوانی آن‌ها در طبیعت

نام عنصر	نماد	Z	N	درصد فراوانی در طبیعت	نام عنصر	نماد	Z	N	درصد فراوانی در طبیعت
هیدروژن ۱	H	۱	۰	۹۹/۹۸۸۵	کربن ۱۳	^{13}C	۶	۷	۱/۰۷
دوتریم (هیدروژن ۲، ^{2}H)	D	۱	۱	۰/۰۱۱۵	کربن ۱۴	^{14}C	۶	۸	یافت نمی‌شود
تریتیم (هیدروژن ۳، ^{3}H)	T	۱	۲	بسیار نادر	اورانیم ۲۳۵	^{235}U	۹۲	۱۴۳	۰/۷۱۶
کربن ۱۲	^{12}C	۶	۶	۹۸/۹۳	اورانیم ۲۳۸	^{238}U	۹۲	۱۴۶	۹۹/۲۸۴

بررسی موارد:

الف: نوترون بدون بار الکتریکی است و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است. (✓)

ب:

$$^{103}Rh \rightarrow A=103 \rightarrow Z+N=103 \quad (A)\text{عدد جرمی}\rightarrow 103$$

عدد نوترونی اتم، که همان تعداد نوترون‌های (N) هستهٔ اتم است، برابر با ۵۸ است، با جایگذاری در رابطهٔ $Z+N=103$، تعداد پروتون‌های (Z) هستهٔ اتم (عدد اتمی) را به دست می‌آوریم:

$$Z+N=103 \xrightarrow{N=58} Z+58=103 \rightarrow Z=103-58=45$$

هستهٔ اتم از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است، نوترون بدون بار الکتریکی است اما پروتون دارای بار الکتریکی است و بار الکتریکی هر پروتون برابر با $+1/6\times10^{-19}C$ است. پس بار الکتریکی خالص هسته از رابطهٔ $q=+Ze$، به‌دست می‌آید:

$$q=+Ze \xrightarrow[e=1/6\times10^{-19}C=16\times10^{-20}C]{Z=45} q=+45\times16\times10^{-20}=\frac{90}{2}\times16\times10^{-20}=720\times10^{-20}=7/2\times10^{-18}C \quad (✗)$$

ج: (✗)

این دو جمله را با هم اشتباه نگیرید:

۱- ویژگی‌های هستهٔ یک اتم را تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های اتم (عدد جرمی (A)) تعیین می‌کند.

۲- خواص شیمیایی هر اتم را تعداد پروتون‌های هسته (عدد اتمی (Z)) تعیین می‌کند.

د: تنها عناصری را می‌توان با روش شیمیایی از یکدیگر جدا کرد که عدد اتمی (Z) متفاوتی از یکدیگر داشته باشند و در واقع خواص شیمیایی‌شان متفاوت از یکدیگر باشد. ایزوتوپ‌ها (مانند $^{47}_{22}X$ و $^{49}_{22}X$) به دلیل اینکه عدد اتمی (Z) برابر دارند، پس خواص شیمیای‌شان یکسان است و نمی‌توان به روش شیمیایی، آن‌ها را از یکدیگر جدا کرد. (✗)

پس ۱ مورد از مطالب داده‌شده، درست است.

گروه آموزشی ماز

۲۲ **کدام گزینه نادرست است؟**

۱) بیشتر جرم یک اتم در هستهٔ آن متمرکز شده است.

۲) نیروی هسته‌ای، کوتاه‌برد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.

۳) جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی بیشتر است.

۴) هسته‌ها در واکنش شیمیایی برانگیخته نمی‌شوند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۶)

بررسی گزینه‌ها:

۱ـ بیشتر جرم یک اتم (بیش از ۹۹/۹ درصد آن) در هستهٔ اتم متمرکز شده است. (✓)

۲ـ نیروی هسته‌ای، کوتاه‌برد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند. (✓)

۳ـ جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده‌اش (پروتون‌ها و نوترون‌ها) اندکی کمتر است. (✗)

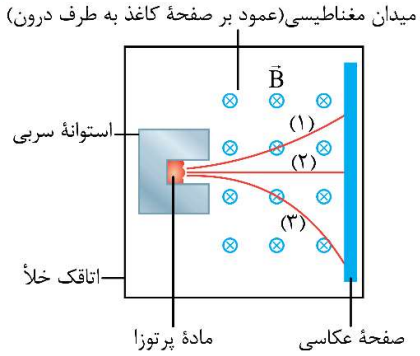
۴ـ هسته‌ها در واکنش شیمیایی برانگیخته نمی‌شوند. (✓)

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۲۳ شکل مقابل، طرح آزمایش ساده‌ای را نشان می‌دهد، که در آن مسیر پرتوهای گسیل‌شده (پرتوهای آلفا، بتای منفی و گاما) از یک مادهٔ پرتوزای طبیعی مشخص شده، و این پرتوها از یک میدان مغناطیسی عبور می‌کنند. چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟



الف: میزان نفوذ پرتوی شمارهٔ (۲) در یک ورقه سربی، بیشتر از میزان نفوذ پرتوی شمارهٔ (۱) در همان ورقه سربی است.

ب: جرم ذرات پرتوی شمارهٔ (۳)، از جرم ذرات پرتوی شمارهٔ (۱)، بیشتر است.

ج: واپاشی ذرات پرتوی شمارهٔ (۱)، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

د: در واپاشی ذرات پرتوی شمارهٔ (۳)، یک نوترون درون هسته به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۶)

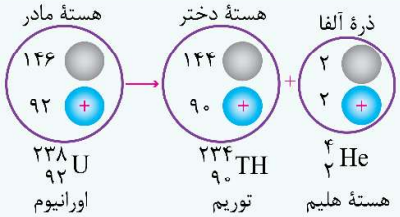
واپاشی آلفا

۱ـ این واپاشی در هسته‌های سنگین روی می‌دهد.

۲ـ پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم $({}^{4}_{2}He)$ هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.

۳ـ برد پرتوهای α کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافتی کوتاه در حدود ۱cm تا ۲cm در هوا یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. پرتوهای α کمترین نفوذ را دارند و با ورقهٔ نازک سربی با ضخامت ناچیز $(0/01mm)$ متوقف می‌شوند.

۴ـ اگر ذره‌های α از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند، باعث آسیب‌های شدید به بدن خواهند شد. به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He \qquad (\alpha \text{ واپاشی}) $$

واپاشی β^-

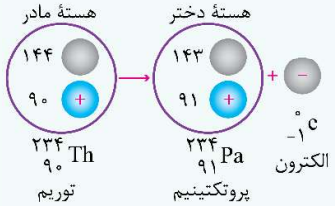
۱ـ این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

۲ـ پرتوهای β^- در واقع همان الکترون‌ها هستند.

۳ـ پرتوهای β^- مسافت خیلی بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سرب نفوذ می‌کنند. تقریباً پرتوهای β^- می‌توانند مسافتی در حدود $(0/1mm)$ در سرب نفوذ کنند.

۴ـ الکترون گسیل‌شده در این واپاشی یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به یک پروتون و یک الکترون تبدیل شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e^{-} \qquad (\beta^- \text{ واپاشی}) $$

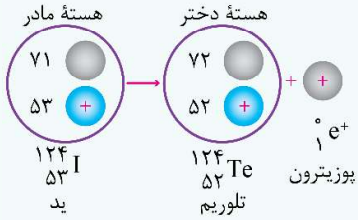
واپاشی β^+

۱ـ در این واپاشی ذرهٔ گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار $-e$ دارای بار الکتریکی $+e$ است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می‌شود.

۲ـ مسافتی که پرتوهای β^+ در سرب نفوذ می‌کنند مانند β^- در حدود $(0/1mm)$ است.

۳ـ هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}e^{+} \qquad (\beta^+ \text{ واپاشی}) $$

واپاشی γ

۱ـ اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسند.

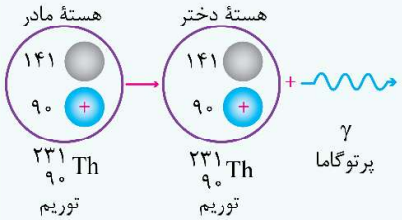
۲ـ پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی‌باشند و از فوتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند.

۳ـ پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقهٔ سربی به ضخامت $(100mm)$ عبور کنند.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

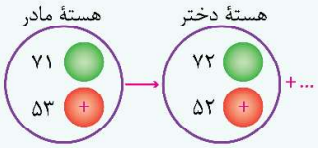
به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



$${}^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$ (واپاشی γ)

مثال:

شکل مقابل، واپاشی ید ۱۲۴ را نشان می‌دهد. نام ذرهٔ گسیل‌شده، در کدام گزینه به درستی آمده است؟



۱) آلفا

۲) گاما

۳) پوزیترون

۴) الکترون

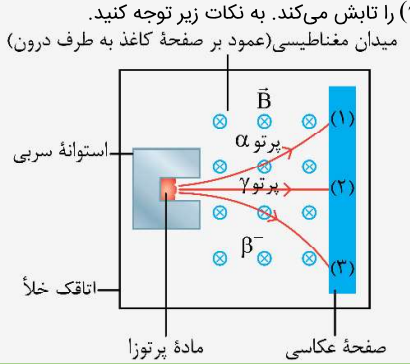
پاسخ: ۳

با توجه به واپاشی انجام‌شده می‌توان نوشت:

$${}^{124}_{53}I \rightarrow {}^{124}_{52}Te + {}^{A}_{Z}X \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ Z = 1 \end{cases} \rightarrow {}^{0}_{+1}X = {}^{0}_{+1}\beta = \text{پوزیترون}$$

نکته:

در شکل مقابل یک مادهٔ پرتوزا در محفظه‌ای قرار گرفته است و سه پرتوی آلفا (α)، بتای منفی (β^-) و گاما (γ) را تابش می‌کند. به نکات زیر توجه کنید.



۱ـ پرتو γ از جنس امواج الکترومغناطیسی است و بار الکتریکی ندارد، بنابراین در میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود و در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

۲ـ پرتوی α از جنس هستهٔ اتم هلیم است و دارای بار مثبت می‌باشد، بنابراین طبق قاعدهٔ دست راست، در میدان مغناطیسی نشان داده‌شده به طرف بالا منحرف می‌شود.

۳ـ پرتوی β^- از جنس الکترون است و دارای بار منفی می‌باشد، بنابراین در میدان مغناطیسی نشان داده‌شده به سمت پایین منحرف می‌شود.

۴ـ جرم ذرات α بسیار بیشتر از جرم ذرات β^- است، به همین دلیل میزان انحراف α کمتر از انحراف β^- می‌باشد.

بررسی موارد:

طبق نکات درسنامه، پرتوهای شمارهٔ (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب، پرتوهای آلفا (α)، بتای منفی (β^-) و گاما (γ) هستند.

الف: میزان نفوذ پرتوی گاما (γ) (پرتوی شمارهٔ۲) در یک ورقه سربی، بیشتر از میزان نفوذ پرتوی آلفا (α) (پرتوی شمارهٔ ۱) در همان ورقه سربی است. (✓)

ب: جرم ذرات آلفا (α) (ذرات پرتوی شمارهٔ۱)، بسیار بیشتر از جرم ذرات بتای منفی (β^-) (ذرات پرتو شمارهٔ۳) است. (✗)

ج: واپاشی بتای منفی (β^-) (ذرات پرتوی شمارهٔ ۳) متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است. (✗)

د: در واپاشی بتای منفی (β^-) (ذرات پرتوی شمارهٔ۳)، یک نوترون درون هسته، به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود و الکترون از هسته خارج می‌شود. (گسیل می‌شود) (✓)

گروه آموزشی ماز

۲۴ **حاصل واپاشی هستهٔ مادر ${}^{232}_{90}Th$، یک هستهٔ دختر A، n ذرهٔ آلفا و ۴ ذرهٔ الکترون است و حاصل واپاشی هستهٔ مادر ${}^{99}_{48}Cd$، یک هستهٔ دختر B، m ذرهٔ آلفا و ۱ ذرهٔ پوزیترون است. اگر تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر A و هسته دختر B، به‌ترتیب ۱۲۶ و ۵۰ تا باشد، m+n کدام است؟**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶)

گام اول:

معادلهٔ واپاشی هستهٔ مادر ${}^{232}_{90}Th$ را می‌نویسیم:

$${}^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{A}_{Z_1}A + n\,{}^{4}_{2}\alpha + 4\,{}^{0}_{-1}e$$

پایستگی عدد جرمی : $232 = A_1 + n(4) + 4(0) \rightarrow 232 = A_1 + 4n$

پایستگی عدد اتمی : $90 = Z_1 + n(2) + 4(-1) \rightarrow 90 = Z_1 + 2n - 4 \rightarrow 94 = Z_1 + 2n$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سؤال گفته تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر A، ۱۲۶ تا است، پس $N_1 = ۱۲۶$ است. حال داریم:

$$A_1 = N_1 + Z_1 \rightarrow N_1 = A_1 - Z_1 \rightarrow A_1 - Z_1 = ۱۲۶$$

$$\begin{cases} ۲۳۲ = A_1 + ۴n \\ ۹۴ = Z_1 + ۲n \end{cases} \xrightarrow[\text{پایین کم می‌کنیم}]{\text{معادله بالا را از معادله}} ۱۳۸ = (A_1 - Z_1) + (۴n - ۲n)$$

$$\xrightarrow{A_1 - Z_1 = ۱۲۶} ۱۳۸ = ۱۲۶ + ۲n \rightarrow ۱۲ = ۲n \rightarrow n = ۶$$

گام دوم:

معادلهٔ واپاشی $^{۹۹}_{۴۸}Cd$ را می‌نویسیم:

$$^{۹۹}_{۴۸}Cd \rightarrow {}^{A_2}_{Z_2}B + m\,^{۴}_{۲}\alpha + {}^{۰}_{+۱}e$$

پایستگی عدد جرمی : $۹۹ = A_2 + m(۴) + ۰ \rightarrow ۹۹ = A_2 + ۴m$

پایستگی عدد اتمی : $۴۸ = Z_2 + m(۲) + ۱ \rightarrow ۴۸ = Z_2 + ۲m + ۱ \rightarrow ۴۷ = Z_2 + ۲m$

سؤال گفته تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر B، ۵۰ تا است، پس $N_2 = ۵۰$ است. حال داریم:

$$A_2 = Z_2 + N_2 \rightarrow N_2 = A_2 - Z_2 \rightarrow A_2 - Z_2 = ۵۰$$

$$\begin{cases} ۹۹ = A_2 + ۴m \\ ۴۷ = Z_2 + ۲m \end{cases} \xrightarrow[\text{پایین کم می‌کنیم}]{\text{معادله بالا را از معادله}} ۵۲ = (A_2 - Z_2) + (۴m - ۲m)$$

$$\xrightarrow{A_2 - Z_2 = ۵۰} ۵۲ = ۵۰ + ۲m \rightarrow ۲ = ۲m \rightarrow m = ۱$$

گام سوم:

خواستهٔ سوال برابر است با:

$$m + n = ۱ + ۶ = ۷$$

گروه آموزشی ماز

۲۵ **تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه مادهٔ پرتوزا، برابر ۲۵۶ است. اگر پس از گذشت ۱۸۰ دقیقه، تعداد هسته‌های اولیه، ۹۳/۷۵ درصد کاهش یابد، پس از چند دقیقه از ابتدای واپاشی مادهٔ پرتوزا، تعداد هسته‌های واپاشی‌شدهٔ مادهٔ پرتوزا برابر ۲۲۴ می‌شود؟**

۱) ۴۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۹۰ ۴) ۲۷۰

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶)

پرتوزایی و نیمه‌عمر

۱ـ مدت زمانی که طول می‌کشد تا نیمی از یک مادهٔ پرتوزا واپاشیده شود را «نیمه‌عمر» آن ماده می‌گویند و آن را با T نشان می‌دهند.

۲ـ اگر تعداد هسته‌های اولیه برابر N_0 باشد، پس از گذشت هر نیمه‌عمر، تعداد هسته‌های باقی‌مانده نصف می‌شود.

$$N_0 \xrightarrow{\frac{T_{\frac{1}{2}}}{}} \frac{N_0}{۲} \xrightarrow{\frac{T_{\frac{1}{2}}}{}} \frac{N_0}{۴} \xrightarrow{\frac{T_{\frac{1}{2}}}{}} \frac{N_0}{۸} \cdots$$

۳ـ تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده (N) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$N = N_0 \left(\frac{۱}{۲}\right)^n \quad , \quad n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

N_0 : تعداد هسته‌های مادر اولیه در نمونهٔ پرتوزا
n : تعداد نیمه‌عمرها
t : زمان
$T_{\frac{1}{2}}$: نیمه‌عمر

۴ـ اختلاف تعداد هسته‌های مادر اولیه در نمونهٔ پرتوزا و هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده برابر تعداد هسته‌های واپاشی شده است.

$$N_{\text{واپاشیده}} = N_0 - N_{\text{پرتوزای باقی‌مانده}}$$

$$\rightarrow N_{\text{واپاشیده}} = N_0 - \frac{N_0}{\frac{t}{۲T_{\frac{1}{2}}}} = N_0 \left(۱ - \frac{۱}{\frac{t}{۲T_{\frac{1}{2}}}}\right)$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

گام اول:

تعداد هسته‌های اولیهٔ یک نمونه مادهٔ پرتوزا (N_0) پس از گذشت $t_1 = 180\,min$، ۹۳/۷۵ درصد کاهش یافته است. پس تعداد هسته‌های فعال باقی مانده برابر است با:

$$N = N_0 - \frac{93/75}{100}N_0 \rightarrow N = \frac{6/25}{100}N_0$$

گام دوم:

نیمه‌عمر (T) مادهٔ پرتوزا را بر حسب دقیقه (min) به دست می‌آوریم:

$$N = N_0(\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}} \xrightarrow[t=t_1=180\,min]{N=\frac{6/25}{100}N}$$

$$\frac{6/25}{100}N_0 = N_0(\frac{1}{2})^{\frac{180}{T}} \rightarrow \frac{6/25}{100} = (\frac{1}{2})^{\frac{180}{T}} \rightarrow$$

$$\frac{625}{10000} = (\frac{1}{2})^{\frac{180}{T}} \rightarrow \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^{\frac{180}{T}}$$

$$\rightarrow (\frac{1}{2})^4 = (\frac{1}{2})^{\frac{180}{T}} \rightarrow 4 = \frac{180}{T} \rightarrow T = \frac{180}{4} = 45\,min$$

گام سوم:

با توجه به اینکه پس از گذشت مدت زمان t_2، تعداد هسته‌های واپاشی شده ماده پرتوزا ($N_{واپاشیده}$)، ۲۲۴ تا است، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده ($N_{پرتوزای\,باقی‌مانده}$) را پس از گذشت مدت زمان t_2، به‌دست می‌آوریم:

$$N_{واپاشیده} = N_0 - N_{پرتوزای\,باقی‌مانده} \xrightarrow[N_0=256]{N_{واپاشیده}=224} 224 = 256 - N_{پرتوزای\,باقی‌مانده} \rightarrow N_{پرتوزای\,باقی‌مانده} = 256 - 224 = 32$$

گام چهارم:

پس از گذشت مدت زمان t_2، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده ($N_{پرتوزای\,باقی‌مانده}$)، برابر ۳۲ است، بنابراین:

$$N = N_0(\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$$

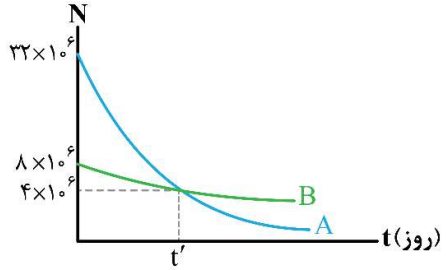
$$\xrightarrow[N_0=256\,,\,t=t_2\,,\,T=45\,min]{N=32} 32 = 256(\frac{1}{2})^{\frac{t_2}{45}} \rightarrow$$

$$\frac{32}{256} = (\frac{1}{2})^{\frac{t_2}{45}} \xrightarrow[\text{مخرج کسر را تقسیم بر ۳۲ می‌کنیم}]{\text{در سمت چپ تساوی صورت و}} \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{\frac{t_2}{45}}$$

$$\rightarrow (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{\frac{t_2}{45}} \rightarrow 3 = \frac{t_2}{45} \rightarrow t = 3 \times 45 = 135\,min$$

گروه آموزشی ماز

۲۶ نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده، برای دو مادهٔ پرتوزا A و B، برحسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر نیمه‌عمر مادهٔ پرتوزا A، ۲ روز باشد، در ۶ روز سوم از ابتدای واپاشی مادهٔ B، چند هستهٔ آن دچار واپاشی می‌شوند؟



۱) 2×10^6

۲) $2/5\times10^5$

۳) 5×10^5

۴) 10^6

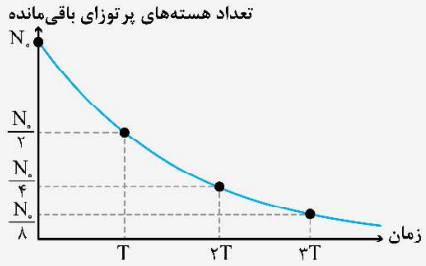
www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

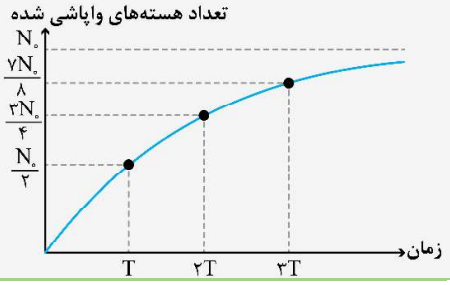
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۶)

نکته:

۱ـ نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌ماندهٔ یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان مطابق شکل مقابل است.



۲ـ نمودار تعداد هسته‌های واپاشی‌شده برحسب زمان مطابق شکل زیر است. دقت کنید که در هر لحظه مجموع تعداد هسته‌های واپاشی‌شده و هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده برابر تعداد هسته‌های مادر اولیه است.



گام اول:

در زمان t'، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده (N) در مادهٔ پرتوزای A، ۴×۱۰^{۶} تا است. با توجه به اینکه، تعداد هسته‌های مادر اولیه (N_0) در مادهٔ پرتوزای A، ۳۲×۱۰^{۶} تا است و همچنین، نیمه‌عمر ماده پرتوزا A (T_A) برابر ۲ روز است، زمان t' را برحسب روز به دست می‌آوریم:

$$N = N_0(\frac{۱}{۲})^{n} \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}} \xrightarrow[N_0=۳۲\times۱۰^{۶},\ t=t',\ T_A=۲\text{روز}]{N=۴\times۱۰^{۶}}$$

$$۴\times۱۰^{۶} = ۳۲\times۱۰^{۶}(\frac{۱}{۲})^{\frac{t'}{۲}} \rightarrow \frac{۴\times۱۰^{۶}}{۳۲\times۱۰^{۶}} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t'}{۲}} \rightarrow \frac{۴}{۳۲} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t'}{۲}}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۸} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t'}{۲}} \rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۳} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t'}{۲}} \rightarrow ۳ = \frac{t'}{۲} \rightarrow t' = ۶\text{روز}$$

گام دوم:

در زمان $t' = ۶$ روز، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده (N) در ماده پرتوزای B، ۴×۱۰^{۶} تا است. با توجه به اینکه تعداد هسته‌های مادر اولیه (N_0) در ماده پرتوزای B، ۸×۱۰^{۶} تا است، می‌توان فهمید در مدت ۶ روز، تعداد هسته‌های مادهٔ B نصف شده است، بنابراین نیمه‌عمر ماده پرتوزای B (T_B) برابر روز $T_B = ۶$ است.

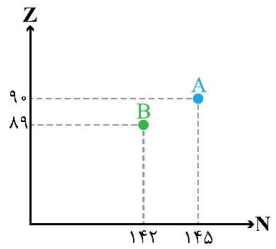
گام سوم:

با توجه به شکل زیر، تعداد هسته‌های باقی ماندهٔ B در ۶ روز سوم، از ۲×۱۰^{۶} به $۱۰^{۶}$ رسیده است و به اندازهٔ $۱۰^{۶}$ هستهٔ آن دچار واپاشی می‌شوند.

$$۸\times۱۰^{۶} \xrightarrow{۶\text{روز اول}} ۴\times۱۰^{۶} \xrightarrow{۶\text{روز دوم}} ۲\times۱۰^{۶} \xrightarrow{۶\text{روز سوم}} ۱۰^{۶}$$

در این بازه $۱۰^{۶}$ هسته دچار واپاشی شده‌اند

۲۷ هستهٔ A با انجام کدام‌یک از واپاشی‌های زیر به هستهٔ B تبدیل می‌شود؟



۱) یک واپاشی β^{+} و یک واپاشی α

۲) یک واپاشی β^{-} و یک واپاشی α

۳) یک واپاشی β^{+} و دو واپاشی α

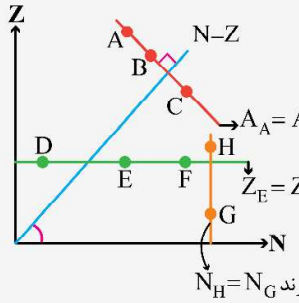
۴) یک واپاشی β^{-} و دو واپاشی α

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۶)

نکته:



تمام نقاط روی این خط، عدد جرمی یکسان دارند $A_A = A_B = A_C$

تمام نقاط روی این خط، عدد اتمی یکسانی دارند(ایزوتوپ هستند) $Z_E = Z_F = Z_D$

تمام نقاط روی این خط، عدد نوترونی یکسان دارند $N_H = N_G$

نام واپاشی	ذره یا پرتوی تابش شده	هستهٔ مادر	هستهٔ دختر	تغییر مکان در جدول تناوبی عنصرها	معادلهٔ واکنش	انحراف در میدان مغناطیسی	نفوذپذیری در سرب	اتفاقات واکنش
آلفازا	${}^{4}_{2}He$	${}^{A}_{Z}X$	${}^{A-4}_{Z-2}Y$	دو خانه به عقب	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha$	α X X X	۰/۰۱mm	هسته دو پروتون و دو نوترون از دست می‌دهد
بتازای منفی	${}^{0}_{-1}e^{-}$	${}^{A}_{Z}X$	${}^{A}_{Z+1}Y$	یک خانه به جلو	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + \beta^{-}$	β^- X X X	۰/۱mm	یک نوترون به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود و عدد اتمی هسته یک واحد افزایش می‌یابد.
بتازای مثبت	${}^{0}_{+1}e^{+}$	${}^{A}_{Z}X$	${}^{A}_{Z-1}Y$	یک خانه به عقب	${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \beta^{+}$	β^+ X X X	۰/۱mm	یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و عدد اتمی هسته یک واحد کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی:

هستهٔ A باید واپاشی انجام دهد که سه نوترون آن کم شود و یک پروتون آن نیز کاهش یابد. فرض کنیم n ذرهٔ α و m ذرهٔ β^- تابش شده باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$${}^{235}_{90}A \rightarrow {}^{231}_{89}B + n\,{}^{4}_{2}\alpha + m\,{}^{0}_{-1}e^{-}$$

پایستگی عدد جرمی : $235 = 231 + 4n \rightarrow n = 1$

پایستگی عدد اتمی : $90 = 89 + 2n - m \xrightarrow{n=1} m = 1$

بنابراین با تابش یک ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^-، هستهٔ A به هستهٔ B تبدیل می‌شود.

۲۸ به ترتیب از راست به چپ، کلمات کدام‌یک از گزینه‌ها متن زیر را به درستی تکمیل می‌کنند؟

تجربه نشان می‌دهد اگر بتوان نوترون‌های تند را به نحوی کُند ساخت که انرژی جنبشی آن‌ها به حدود ۰/۰۴eV یا کمتر از آن برسد، احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ‌های ${}^{235}_{92}U$ ..... می‌یابد. آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن) از جمله موادی هستند که به عنوان کُندساز نوترون‌ها در واکنش‌های ..... هسته‌ای استفاده می‌شوند.

۱) افزایش ـ گداخت
۲) کاهش ـ گداخت
۳) افزایش ـ شکافت
۴) کاهش ـ شکافت

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۶)

پاسخ تشریحی:

نوترون‌های آزاد شده در فرایند شکافت ایزوتوپ $^{235}_{92}U$، انرژی جنبشی زیادی دارند (به طور متوسط حدود $2MeV$) و به نوترون‌های تُند معروف‌اند. این نوترون‌ها، با احتمال بسیار بیشتری جذب ایزوتوپ $^{238}_{92}U$ می‌شوند. تجربه نشان می‌دهد اگر بتوان نوترون‌های تند را به نحوی کُند ساخت که انرژی جنبشی آن‌ها به حدود $0/04eV$ یا کمتر از آن برسد، احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ‌های $^{235}_{92}U$ افزایش می‌یابد. این افزایش احتمال می‌تواند برای ایجاد واکنش زنجیری شکافت کافی باشد. آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن) از جمله موادی هستند که به عنوان کُندساز نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۲۹ در یک واکنش هسته‌ای، جرم محصولات $0/02u$ کمتر از هسته‌های اولیه است. انرژی آزادشده در این واکنش چند مگاالکترون‌ولت است؟ ($e=1/6\times10^{-19}C$، $c=3\times10^{8}\frac{m}{s}$ و هر واحد جرم اتمی معادل $1/6\times10^{-27}kg$ فرض شود.)

۱) ۱۸ ۲) ۱/۸ ۳) ۲۸/۸ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶)

نکته:

اگر در یک واکنش، مجموع جرم محصولات به اندازهٔ Δm کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه باشد، انرژی آزاد شده در این واکنش برابر $E=\Delta mc^2$ است.

گام اول:

محاسبهٔ جرم برحسب کیلوگرم:

$$\Delta m=0/02u=0/02\times1/6\times10^{-27}=3/2\times10^{-29}kg$$

گام دوم:

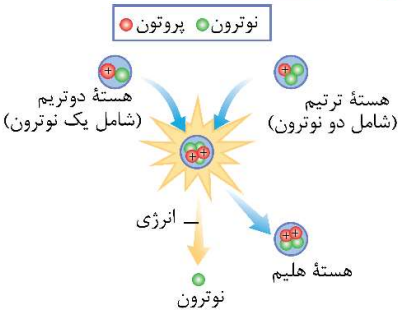
محاسبهٔ انرژی آزادشده:

$$E=\Delta mc^2=3/2\times10^{-29}\times(3\times10^{8})^2=2/88\times10^{-12}J$$

$$\Rightarrow E=\frac{2/88\times10^{-12}}{1/6\times10^{-19}}eV=1/8\times10^{7}eV=18MeV$$

گروه آموزشی ماز

۳۰ کدام‌یک از عبارت‌های زیر در مورد شکل مقابل صحیح است؟



۱) این شکل فرایند شکافت هسته‌ای را نشان می‌دهد.
۲) مجموع جرم محصولات فرایند، برابر با مجموع جرم هسته‌های اولیه است.
۳) نوترون به‌دست آمده در پایان فرایند، انرژی جنبشی زیادی دارد.
۴) این آزمایش می‌تواند در دمایی حدود $1000^{\circ}C$ انجام شود.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۶)

پاسخ تشریحی:

شکل نشان داده شده، فرایند گداخت یا همجوشی هسته‌ای نام دارد. در فرایند گداخت هسته‌ای، دو هستهٔ سبک با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هستهٔ سنگین‌تری به وجود می‌آورند. مثلاً در این شکل، واکنش گداخت زیر رخ داده است:

$$D+T\rightarrow{}^{4}_{2}He+{}^{1}_{0}n$$

در این واکنش با همجوشی هسته‌های دو ایزوتوپ هیدروژن یعنی دوتریم و تریتیم، هستهٔ هلیم و یک نوترون پرانرژی تولید می‌شود. در واکنش گداخت، مجموع جرم محصولات فرایند، کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است. در اینجا نیز این اختلاف جرم با توجه به رابطهٔ $E=mc^2$، سبب آزاد شدن مقدار زیادی انرژی می‌شود.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

در فرایند گداخت، دو هستهٔ کم‌جرم باید به قدر کافی به هم نزدیک شوند تا نیروی کوتاه‌بُرد هسته‌ای بتواند آن‌ها را کنار هم نگه دارد و واکنش گداخت انجام شود. ولی، هر هسته، بار مثبت دارد و هستهٔ دیگر را دفع می‌کند، برای آن‌که هسته‌ها با وجود این نیروی رانشی بسیار قوی، بتوانند به هم گداخته شوند، باید دما بسیار بالا باشد تا هسته‌ها با انرژی جنبشی زیادی به یکدیگر برخورد کنند. به طور مثال، برای شروع واکنش دوتریم ـ تریتیم، به دمایی حدود ده‌ها میلیون درجهٔ سلسیوس نیاز است.

۳۱ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

الف) درست؛ انرژی فعال‌سازی در جهت برگشت برابر $۵۶۲\,kJ$ $(۳۸۱+۱۸۱)$ است، پس:

$$\frac{۵۶۲}{۳۸۱} \simeq ۱/۵$$

ب) نادرست؛ آنتالپی واکنش زیر هم‌ارز با آنتالپی پیوند $N=O$ در مولکول $NO(g)$ است که ارتباطی با نمودار انرژی- پیشرفت واکنش نشان داده‌شده ندارد.

$$NO(g)+Q \rightarrow N(g)+O(g)$$

پ) درست

$$۲NO(g) \rightarrow N_۲(g)+O_۲(g)+۱۸۱kJ$$

$$۱g\,NO \times \frac{۱mol\,NO}{۳۰g\,NO} \times \frac{۱۸۱kJ}{۲mol\,NO} \simeq ۳kJ$$

ت) نادرست؛ انجام نشدن این واکنش در دمای پایین به مقدار ΔH و علامت آن وابسته نیست بلکه به زیاد بودن انرژی فعال‌سازی واکنش در جهت رفت وابسته است.

۳۲ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

بررسی عبارت نادرست:

عبارت چهارم: با مقایسهٔ سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها نمی‌توان دربارهٔ سرعت واکنش‌ها اظهار نظر کرد.

۳۳ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$NO(g)+NO_۲(g)+۲NH_۳(g) \rightarrow ۲N_۲(g)+۳H_۲O(g)$$

با توجه به داده‌های سؤال، مقدار مول گازهای NO و $NO_۲$ در مخلوط برابر است، پس فرض می‌کنیم که x مول از هریک از آن‌ها داریم:

$$(x\,mol\,NO \times \frac{۳۰g}{۱mol\,NO}) + (x\,mol\,NO_۲ \times \frac{۴۶g}{۱mol\,NO_۲}) = ۱/۵۲g \Rightarrow x = ۰/۰۲$$

با توجه به معادلهٔ موازنه شده برای حذف ۱ مول از هریک از اکسیدهای نیتروژن با نسبت مولی یکسان به ۲ مول آمونیاک نیاز است، پس برای حذف $۰/۰۲$ مول از هریک از این اکسیدها به $۰/۰۴$ مول آمونیاک نیاز است که حجم آن در STP برابر است با:

$$۰/۰۴\,mol\,NH_۳ \times \frac{۲۲/۴L\,NH_۳}{۱mol\,NH_۳} \times \frac{۱۰۰۰mL}{۱L} = ۸۹۶\,mL$$

۳۴ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

تعادل اول و چهارم در جهت برگشت جابه‌جا می‌شوند.

تعادل اول: با افزودن Ag^+ به محلول تعادلی، یون‌های نقره با یون‌های کلرید به رسوب $AgCl$ تبدیل می‌شوند و در عمل غلظت یون کلرید کاهش یافته و تعادل برای جبران آن در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.

تعادل دوم: واکنش تولید آمونیاک گرماده است، بنابراین کاهش دما سبب می‌شود که تعادل در جهت تولید گرما و یا همان جهت رفت جابه‌جا شود.

تعادل سوم: افزایش فشار سبب می‌شود که تعادل از سمت مول گازی بیشتر به‌سمت مول گازی کمتر جابه‌جا شود بنابراین تعادل داده‌شده در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

تعادل چهارم: واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، گرماده است، پس افزایش دما سبب می‌شود که این تعادل در جهت مصرف گرما و یا همان جهت برگشت جابه‌جا شود.

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۳۵ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

	$PCl_5(g)$	$\rightleftharpoons$	$PCl_3(g)$	+	$Cl_2(g)$
لحظه شروع	۰/۶		۰		۰
تغییرات	$-x$		$+x$		$+x$
تعادل	$۰/۶-x$		x		x

$\Rightarrow ۰/۶-x=x \Rightarrow x=۰/۳\,mol$

$$\frac{P_{\text{تعادل}}}{P_{\text{شروع}}}=\frac{\text{تعادل (مول)}}{\text{شروع (مول)}}=\frac{۰/۹}{۰/۶}=۱/۵$$

نکته: حجم ظرف، اطلاعات اضافی مسأله است.

۳۶ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

با توجه به نمودار با مصرف شدن ۰/۴ مول از مادهٔ A سامانه به تعادل رسیده است، پس تا برقرار شدن تعادل، ۰/۴ مول C و ۰/۲ مول B تولید شده است. به این ترتیب، غلظت مولی مواد A، B و C در تعادل برابر، ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۸ مول بر لیتر است:

$$K=\frac{[B][C]^2}{[A]^2}=\frac{۰/۴\times ۰/۶۴}{۰/۰۴}=۶/۴\,mol\cdot L^{-1}$$

۳۷ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

در لحظهٔ اعمال تغییر (افزودن گاز نیتروژن به ظرف) تنها غلظت نیتروژن باید دچار تغییر شده باشد (حذف گزینهٔ ۱).

بخشی از این تغییر با پیشرفت واکنش در جهت مصرف گاز نیتروژن (حذف گزینهٔ ۳) و تولید آمونیاک جبران می‌شود.

ضریب مولی آمونیاک دو برابر ضریب مولی نیتروژن است، پس اندازهٔ شیب نمودار تغییرات غلظت مولی آمونیاک باید بزرگ‌تر باشد (حذف گزینهٔ ۴).

۳۸ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

با افزایش حجم ظرف، فشار در سامانهٔ گازی کاهش یافته و با خارج شدن سامانه از تعادل، پیشرفت واکنش در جهت افزایش شمار مول گازهای موجود در ظرف (پیشرفت در جهت برگشت) صورت می‌گیرد تا کاهش فشار ایجادشده را تا حد امکان جبران کند.

بررسی موارد نادرست:

عبارت دوم: واکنش در جهت کاهش شمار مول‌های مادهٔ C پیشرفت می‌کند.

عبارت سوم: سرعت واکنش‌های رفت‌وبرگشت کاهش می‌یابند (به‌دلیل کاهش غلظت مواد).

عبارت پنجم: تعادلی با ثابت تعادل یکسان با تعادل اولیه در ظرف برقرار خواهد شد.

۳۹ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

با فرض پیشرفت واکنش در جهت رفت مسأله را حل می‌کنیم:

$$K_1=\frac{۳\times ۳}{۲^2}=\frac{۹}{۴}$$

	$۲A$	$\rightleftharpoons$	B	+	C
پس‌ازافزودن ۲ مول	۴		۵		۵
تعادل جدید	$۴-۲x$		$۵+x$		$۵+x$

$$K_2=\frac{۹}{۴}=\frac{(۵+x)^2}{(۴-۲x)^2}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۵+x}{۴-۲x}\Rightarrow ۸x=۲\Rightarrow x=۰/۲۵$$

واکنش در جهت رفت پیشرفت می‌کند؛ زیرا مقدار x مثبت به‌دست آمد.

$\Rightarrow$ مول B در تعادل جدید $=۵+۰/۲۵=۵/۲۵$

۴۰ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

$$۲A\rightleftharpoons B\ ,\ K=۴$$

$$۴=\frac{[B]}{[A]^2}$$

$$B\rightleftharpoons C+D\ ,\ K=۹$$

$$۹=\frac{[C]^2}{[B]}\Rightarrow\frac{[C]^2}{[B]}\times\frac{[B]}{[A]^2}=۳۶\Rightarrow\frac{[C]^2}{[A]^2}=۳۶\Rightarrow\frac{[C]}{[A]}=۶$$

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۱ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

عبارت اول: درست

عبارت دوم: نادرست؛ از واکنش گاز اتن با گاز هیدروژن کلرید فراورده‌ای به‌دست می‌آید که در افشانهٔ بی‌حس‌کننده موضعی کاربرد دارد.

عبارت سوم: درست

عبارت چهارم: نادرست؛ در واکنش اتن با محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات به اتیلن گلیکول تبدیل می‌شود که به اشتباه منگنات بیان شده است.

۴۲ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

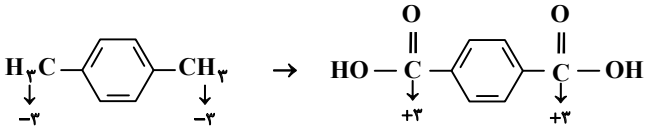
واکنش میان گازی‌های H_2 و O_2 در حضور روی (Zn) و در دمای اتاق سریع است، اما انفجاری (بسیار سریع) نیست.

۴۳ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

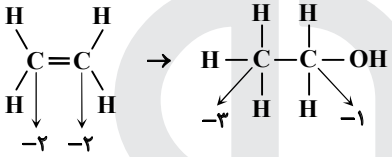
۱) تغییر عدد اکسایش یک اتم کربن موجود، برابر ۲ واحد است.

$$\underset{\downarrow -4}{CH_4} \rightarrow \underset{\downarrow -2}{CH_3OH}$$

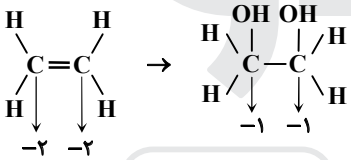
۲) تغییر عدد اکسایش هر اتم کربن برابر ۶ واحد است، پس مجموعاً تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن ۱۲ واحد است.



۳) یکی از کربن‌ها یک واحد کاهش یافته و دیگری یک واحد اکسایش یافته (مجموعاً صفر)



۴) تغییر عدد اکسایش هر اتم کربن ۱ واحد است و مجموعاً برابر ۲ واحد است.

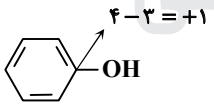


۴۴ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱) نادرست؛ فرمول شیمیایی مادهٔ A مطابق معادلهٔ موازنه شده، Na_2SO_3 است.

۲) نادرست؛ این واکنش براساس اصول شیمی سبز پیشنهاد نمی‌شود؛ زیرا مادهٔ A کاربرد چندانی ندارد و نمکی است که در آب به‌شکل محلول است و حلال صنعتی نیست یعنی سودمند نیست.

۳) نادرست؛ عدد اکسایش اتم C متصل به اتم O در فنول برابر ۱+ است.



۴) درست؛ از مجموع ۲۵ اتم واکنش‌دهنده تنها ۱۳ اتم در ساختار فنول به فراورده‌ای سودمند تبدیل شده‌اند.

۴۵ **گزینه ۳ صحیح است.**

عبارت‌های (آ) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) نماد فلز رودیم (Rh) می‌باشد.

ت) از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی برخی از مولکول‌های موجود در فضای بین‌ستاره‌ای استفاده کرد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۹۳ تا ۹۹)

۴۶ **گزینه ۴ صحیح است.**

با توجه به نمودار انرژی ـ پیشرفت واکنش، ΔH واکنش انجام شده $(2NO \rightarrow N_2 + O_2)$ برابر $-180kJ$ می‌باشد. با توجه به جدول داده شده به ازای پیمایش هر یک کیلومتر توسط این خودرو، ۲ گرم NO در مبدل کاتالیستی مصرف می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$200km \times \frac{2g\,NO}{1km} \times \frac{1mol\,NO}{30g\,NO} \times \frac{180kJ}{2mol\,NO} = 1200kJ$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۴۷ **گزینه ۱ صحیح است.**

عبارت‌های (پ) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) در واکنش $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$، افزایش فشار تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

ب) هر دو واکنش گرماده هستند و با افزایش دما، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا خواهد شد.

$$I)\ 2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g) + \boxed{Q}\uparrow$$

$$II)\ 4HCl(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2H_2O(g) + 2Cl_2(g) + \boxed{Q}\uparrow$$

پ) افزودن مقداری واکنش دهنده به محفظهٔ واکنش (I)، واکنش را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

ت) واکنش (I) گرماده است و سطح انرژی فراورده‌ها در آن پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۷)

۴۸ **گزینه ۴ صحیح است.**

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

	$2SO_3(g)$	$\rightleftharpoons$	$2SO_2(g)$	+	$O_2(g)$
مول اولیه	M		۰		۰
تغییر مول	$-2x$		$+2x$		$+x$
مول در تعادل	$M-2x$		$2x$		x

$$nSO = 2x \Rightarrow 2x = 0/6 \Rightarrow x = 0/3$$

$$\Rightarrow K = \frac{[SO_2]^2[O_2]}{[SO_3]^2} \Rightarrow 9\times10^{-3} = \frac{(\frac{0/6}{V})^2(\frac{0/3}{V})}{(\frac{0/6}{V})^2} \Rightarrow \frac{0/3}{V} = 75\times10^{-3}$$

$$V = 4L$$

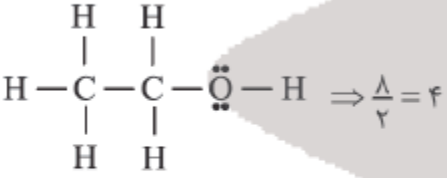
$$\Rightarrow M - 2x = 0/6 \Rightarrow M = 2x + 0/6 \Rightarrow M = 2(0/3) + 0/6$$

$$\Rightarrow M = 1/2mol$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۵)

۴۹ **گزینه ۳ صحیح است.**

ماده B اتانول (C_2H_5OH) می‌باشد که نسبت جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در آن برابر ۴ است.



$$\Rightarrow \frac{8}{2} = 4$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۱۱۲)

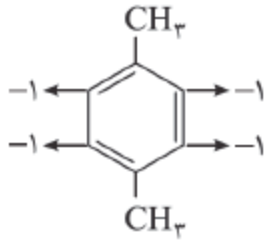
گزینه ۲ صحیح است.

عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) درست‌اند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

آ) در واکنش تبدیل اتن به اتیلن گلیکول، از محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات استفاده می‌شود.

ب) در مولکول پارازایلن، ۴ اتم کربن با عدد اکسایش ۱− مشاهده می‌شود.



پ) فرمول مولکولی اتیل استات به صورت $C_4H_8O_2$ می‌باشد و به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.

ت) هنگام روشن و گرم شدن خودرو به ویژه در روزهای سرد زمستان، مقدار آلایندهٔ بیشتری مشاهده می‌شود.

ث) اتیلن گلیکول یک الکل دوعاملی است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)